

## ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ, ПОСТРОЕННОЙ ПО СТАТИСТИЧЕСКИМ ДАННЫМ

*Аннотация.* Рассматривается задача построения динамических математических моделей реальных процессов на основе статистических данных. Решение задачи производится с помощью аппарата теории дифференциальных включений. Задача составления управляемого прогноза для реального процесса сводится к задаче оптимального управления. Для решения данной задачи реализован программный пакет «Cone», который по известным статистическим данным позволяет строить прогноз реальных процессов при наличии управления с функционалом качества или без него.

*Ключевые слова:* дифференциальное включение, конус возможных решений, программная реализация, статистическая база данных, прогноз, функционал качества, управление.

*Abstract.* The problem of constructing dynamic mathematical models of real processes on the basis of statistical data. The solution is made by means of the theory of differential inclusions. The task of compiling a controlled outlook for the real process is reduced to the problem of optimal control. To solve this problem, implemented a software package «Cone», which by the known statistical data allows us to construct forecasts of real processes in the presence of a functional quality control or without it.

*Keywords:* differential inclusion, the cone of possible solutions, software implementation, statistical data base, prediction, functional quality, management.

### Введение

Построение математических моделей и составление на их основе прогнозов поведения различных процессов является одной из важнейших задач. С появлением и развитием вычислительной техники это направление получило очень широкое распространение.

На сегодня существует большое количество инструментов для обработки статистических данных, позволяющих строить прогнозы. Так, программные продукты Microsoft Excel, OpenOffice.org, StatSoft Statistica, SPSS и некоторые другие позволяют построить прогноз поведения исследуемого объекта с помощью статистического анализа. Они используют для этого аппарат теории вероятностей и математической статистики и требуют от пользователя базовых знаний этих дисциплин. Пакеты MatLab, iThink позволяют строить прогнозы по статистическим данным на основе статистических, динамических и нейросетевых моделей, но требуют от пользователя специального математического образования, а также глубоких знаний в области программирования. Существует также программное обеспечение для решения узкого круга задач, например, прогнозирование бизнес-процессов: SAP APO, Logility.

В настоящей работе приводится описание программного обеспечения для построения динамических моделей по известным многолетним статистическим данным. Исследуемые процессы предполагаются «близкими» к периодическим или «сезонными». Если удастся выявить величину цикла этих колебаний, то такую статистическую информацию можно использовать для составления прогноза с помощью программного пакета «Cone».

**Математическая постановка задачи**

Имеются статистические данные базы данных  $X_{T_0, T_1}$ . Предполагается, что они описывают некоторый процесс  $x = x(t)$ ,  $t \in [T_0, T_1]$  и  $x \in AC[T_0, T_1]$ , где  $AC[T_0, T_1]$  – класс абсолютно непрерывных функций на  $[T_0, T_1]$ .

Требуется найти все такие абсолютно-непрерывные функции на  $[T_0, T_1]$ , которые порождают базу данных  $X_{T_0, T_1}$ . Известно [1], что все такие функции удовлетворяют решению дифференциального включения:

$$\frac{dx}{dt} \in F(t, x),$$

где  $F(t, x)$  – многозначная функция, которую можно построить, задав ее «границы» применения. Это дифференциальное включение можно заменить дифференциальным неравенством [1]:

$$\mu(t, x) \leq \frac{dx}{dt} \leq \lambda(t, x).$$

Для построения функций  $\lambda = \lambda(t, x)$  и  $\mu = \mu(t, x)$  можно применять различные методы, лишь бы выполнялись условия существования решения задачи Коши для дифференциального включения условия Зарембы [2]. Поэтому функции  $\lambda$  и  $\mu$  предполагаются квазимоноotonно неубывающими. Сегмент  $[T_0, T_1]$  – это участок, на котором поведение вектора  $x = x(t)$  известно; оно определено статистикой. Повлиять на вектор  $x = x(t)$  уже нет возможности, поэтому промежуток  $[T_0, T_1]$  называют неуправляемым [1].

На промежутке  $[T_1, T_2]$  в «новом» сезоне необходимо построить прогноз – функцию  $x = x(t)$ , которая описывала бы все возможные поведения процесса. Исследование поведения решений дифференциальных включений можно проводить с использованием функционала качества  $I = I(t, x, u)$  и без него. Здесь предполагается, что на промежутке  $[T_1, T_2]$  имеется возможность управлять процессом с помощью некоторой функции  $u = u(t)$  из некоторого класса допустимых управлений  $K \subset AC[T_1, T_2]$ . Ясно, что  $x = x(t, x, u) \in AC[T_1, T_2]$  и на промежутке  $[T_1, T_2]$  удовлетворяет новому дифференциальному включению:

$$\frac{dx}{dt} \in F_1(t, x, u).$$

Задача состоит в том, чтобы построить правую часть этого включения, а именно, построить квазимонотонные вектор-функции  $\lambda = \lambda_1(t, x, u)$  и  $\mu = \mu_1(t, x, u)$  такие, что

$$\mu_1(t, x, u) \leq \frac{dx}{dt} \leq \lambda_1(t, x, u)$$

при всех  $t \in [T_1, T_2]$  и допустимых управлениях  $u \in K$ .

Решать такую задачу прямыми вычислениями без привлечения численных методов и создания программного обеспечения, по крайней мере, нерационально. Поэтому мы предлагаем для решения поставленных задач (хотя бы в некоторых частных случаях) использовать специализированное программное обеспечение «Cone». Цель пакета «Cone» – построить границы конуса возможных решений при различных управлениях с заданным функционалом качества и без него.

### Структура пакета «Cone»

«Cone» разрабатывается на языке C# [3] в среде Visual Studio 2008 для использования на платформе .net framework [4]. Использование именно этой платформы позволяет легко подключать сторонние библиотеки, реализующие численные методы, алгоритмы, визуализацию результатов. Возможности платформы позволяют выводить результаты работы в виде, пригодном для использования в других программных продуктах, например, для дальнейшей обработки в MatLab или для подготовки к публикации в LaTeX.

Пакет «Cone» состоит из нескольких модулей:

1. *Модуль ввода исходных данных и настроек для построения решения.* Исходная статистическая информация должна быть представлена в виде XML-файла или таблицы MS Excel. Использование XML удобно, потому что практически все современные СУБД, или электронные таблицы, позволяют сохранять информацию в этом формате. Имеется возможность вносить статистические данные «вручную» в соответствующую форму приложения. После загрузки данных в приложение выполняются их проверка на корректность и предварительная обработка.

2. *Модуль построения решения.* Здесь реализована основная задача программного пакета. Сначала производится вычисление разделенных разностей и поиск минимальных и максимальных среди них. Затем ищутся решения для уравнений сравнений. Поиск решений можно осуществлять двумя методами:

– метод «ломаных». Предполагается, что вектор-функции  $\lambda = \lambda(t, x)$  и  $\mu = \mu(t, x)$  являются кусочно-постоянными на соответствующих разбиениях сетки. В этом случае решения для уравнений сравнения (верхняя и нижняя границы конуса) – ломаные, составленные из отрезков прямых  $y = kx + b$ . А коэффициенты  $k$  и  $b$  на каждом участке разбиения определяются из начальных данных;

– нелинейная аппроксимация. Используется в том случае, если  $\lambda = \lambda(t, x)$  и  $\mu = \mu(t, x)$  не являются кусочно-постоянными на соответствующих разбиениях сетки, а выбираются другим способом. В этом случае для построения конуса возможных решений необходимо решать уравнения

сравнения  $\frac{dy}{dt} = \mu(t, y)$  и  $\frac{dz}{dt} = \lambda(t, z)$ . По теореме Важевского [5]  $y(t) \leq x(t) \leq z(t)$ .

Построение решений на управляемом участке можно производить с функционалом качества и без него. Функционал качества накладывает серьезные ограничения на численные методы решения. В пакете «Cone» для

функционалов вида  $I = \int_{T_1}^{T_2} f_0(s, x(s), u(s)) ds$ , где  $f_0$  – непрерывная функция,

использован стандартный подход: функционал качества заменяется на сетке интегральной суммой. В этом случае возникает необходимость решать систему нелинейных алгебраических уравнений.

3. *Модуль вывода результатов.* После работы модуля построения решения полученные результаты становятся доступны пользователю. Вывод результата осуществляется в отдельном окне: в виде графика конуса возможных траекторий на неуправляемом и управляемом участках. Также прогноз – база данных, содержащая значения верхней и нижней границ конуса, и найденные управления отображаются в виде таблицы. Полученные результаты можно сохранить во внешнем файле, что делает их доступными для использования другими приложениями. В случае многомерной статистической базы данных при выводе результатов в графическом виде решения отображаются по каждой координате в отдельном окне.

Нерешенные задачи и возможные доработки:

- 1) численная реализация принципа максимума Понтрягина для нахождения оптимального управления [6];
- 2) работа пакета с произвольным функционалом качества;
- 3) добавление функционалов качества без перекомпиляции приложения.

#### *Список литературы*

1. **Воскресенский, Е. В.** Анализ баз данных и программных движений / Е. В. Воскресенский // Труды Средневолжского математического общества. – Саранск, 2008. – Т. 10. – № 1. – С. 8–13.
2. **Филиппов, А. Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывными правыми частями и дифференциальные включения / А. Ф. Филиппов // Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные включения / под ред. В. А. Треногина, А. Ф. Филиппова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 464 с.
3. **Троелсен, Э.** C# и платформа .Net / Э. Троелсен. – СПб.: Питер, 2007. – 796 с. – (Библиотека программиста).
4. **Нэш, Т. С.** 2008: ускоренный курс для профессионалов : пер. с англ. / Т. Нэш. – М.: Вильямс, 2008. – 576 с.
5. **Руш, Н.** Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости / Н. Руш, П. Абетс, М. Лалуа. – М.: Мир, 1980. – 300 с.
6. **Бахвалов, Н. С.** Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – 6-е изд. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. – 636 с.

---

**Каледин Олег Евгеньевич**

программист, кафедра прикладной математики, Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева

E-mail: appmath@svmo.ru

---

**Kaledin Oleg Evgenyevich**

Programmer, sub-department of applied mathematics, Mordovia State University named after N. P. Ogarev

---

УДК 519.71

**Каледин, О. Е.**

**Программная реализация одной динамической модели, построенной по статистическим данным** / О. Е. Каледин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 1 (13). – С. 14–17.